# Rappels et compléments d'algèbre linéaire

## Table des matières

Dans ce chapitre, $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

# 1 Somme et somme directe de $p$ sous-espaces vectoriels.

## 1.1 Définition de la somme de plusieurs sous-espaces vectoriels de E.

Soit $(F_1, \dots, F_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$.
On appelle somme des sous-espaces $F_1, \dots, F_p$, le sous-espace vectoriel de $E$ :

$$F_1 + \cdots + F_p = \left\{ \vec{x} \in E \,\middle|\, \exists \left( \vec{x_1}, \dots \vec{x_p} \right) \in F_1 \times \cdots \times F_p \;/\; \vec{x} = \vec{x_1} + \cdots + \vec{x_p} \right\}$$

Autrement dit, tout vecteur de la somme se « décompose » en la somme (pas nécessairement unique) de vecteurs dont chacun est dans l'un des sous-espaces.

## 1.2 Somme directe de $p$ sous-espaces vectoriels.

**Définition**

La somme $F_1 + \cdots + F_p$ est dite directe si et seulement si :

$$\forall \vec{x} \in F_1 + \cdots + F_p,\ \exists! \left( \vec{x_1}, \dots \vec{x_p} \right) \in F_1 \times \cdots \times F_p \;/\; \vec{x} = \vec{x_1} + \cdots + \vec{x_p}$$

et on note alors cette somme $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Autrement dit, pour tout vecteur de la somme, la « décomposition » est unique.
**Théorème : Caractérisation de la somme directe**

Soit $(F_1, \dots, F_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$.
Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe,
2. pour tout $\left( \vec{x_1}, \dots, \vec{x_p} \right) \in F_1 \times \cdots \times F_p$, si $\vec{x_1} + \cdots + \vec{x_p} = \vec{0}$ alors $\vec{x_1} = \cdots = \vec{x_p} = \vec{0}$,

## 1.3 Dimension d'une somme directe de $p$ sous-espaces vectoriels.

**Théorème**

On suppose que $E$ est de dimension finie. Soit $(F_1, \dots, F_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$.
On suppose que la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe, alors
$\dim \left( F_1 \oplus \cdots \oplus F_p \right) = \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_p)$.

## 1.4 Caractérisation de sommes directes par concaténation des bases. .

**Théorème**

On suppose que $E$ est de dimension finie. Soit $(F_1, \dots, F_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$.
Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on considère une base $\mathscr{B}_i$ de $F_i$.
La somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe si et seulement si la concaténation des bases $\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p$ est une famille libre de $E$.

### 1.5 Base de $E$ adaptée à une décomposition de $E$ en somme directe.

**Définition**

On suppose que $E$ est de dimension finie. Soit $(F_1, \dots, F_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de $E$.
On suppose que : $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p = E$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on considère une base $\mathscr{B}_i$ de $F_i$.
Alors $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{B}_p$ est une base de $E$. On dit que $\mathscr{B}$ est une base de $E$ adaptée à la décomposition en somme directe : $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p = E$

## 2 Projecteurs et symétries.

Dans ce paragraphe, $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). $E$ n'est pas supposé être de dimension finie.

**Définition**
Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$. $E = F \oplus G$
On appelle **projecteur** sur $\boldsymbol{F}$ de direction $\boldsymbol{G}$ l'application :

$$\left\{ \begin{array}{lccc} p & : & E & \longrightarrow & E \\ & & \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} & \longmapsto & p(\vec{x}) = \vec{y} \\ & & \vec{y} \in F, \vec{z} \in G & & \end{array} \right.$$

**Propriétés**

Soit $E = F \oplus G$. Soit $p$ le projecteur sur $F$ de direction $G$. Alors :
- $p \in \mathscr{L}(E)$
- $\mathrm{Ker}(p) = G$
- $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}\ (p - \mathrm{Id}_E) = F$
- $p \circ p = p$.

**Théorème : Caractérisation des projecteurs**
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors :
$u$ est un projecteur de $E$ si et seulement si $u^2 = u$.
Dans ce cas $\mathrm{Ker}\ u \oplus \mathrm{Im}\ u = E$ et $u$ est le projecteur sur $\mathrm{Im}\ u$ de direction $\mathrm{Ker}\ u$.

**Exercice 1** *Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$. Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ ayant pour matrice*

$$M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

*dans la base $\mathscr{B}$.*

1. *Montrer que $f$ est un projecteur.*
2. *Déterminer ses éléments caractéristiques. (c'est-à-dire son image et son noyau)*

**Exercice 2** *On fixe $A \in \mathbb{R}[X]$ . On suppose que deg $A= n \in \mathbb{N}^\star$; On considère l'application $\Phi$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de $P$ par $A$.*

1. *Montrer que $\Phi$ est un projecteur.*
2. *Déterminer ses éléments caractéristiques. (c'est-à-dire son image et son noyau)*

**Définition**
Soit $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$. $E = F \oplus G$
On appelle **symétrie** par rapport à $\boldsymbol{F}$ parallélement à $\boldsymbol{G}$ l'application :

$$\left\{ \begin{array}{lccc} s & : & E & \longrightarrow & E \\ & & \vec{x} = \vec{y} + \vec{z} & \longmapsto & s(\vec{x}) = \vec{y} - \vec{z} \\ & & \vec{y} \in F, \vec{z} \in G & & \end{array} \right.$$

**Remarque**

Soit $E = F \oplus G$. Soit $s$ la symétrie par rapport à $F$ parallélement à $G$ et $p$ le projecteur sur $F$ de direction $G$. Alors : $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.

**Propriétés** Soit $E = F \oplus G$. Soit $s$ la symétrie par rapport à $F$ parallélement à $G$. Alors :
- $s \in \mathscr{L}(E)$
- $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$
- $G = \mathrm{Ker}\ (s + \mathrm{Id}_E)$
- $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

**Théorème : Caractérisation des symétries**
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors :
$u$ est une symétrie de $E$ si et seulement si $u^2 = \mathrm{Id}_E$.
Dans ce cas Ker $(u - \mathrm{Id}_E) \oplus$ Ker $(u + \mathrm{Id}_E) = E$ et $u$ est la symétrie par rapport à Ker $(u - \mathrm{Id}_E)$ parallélement à Ker $(u + \mathrm{Id}_E)$.

# 3 Sous-espace stable par un endomorphisme.

**Définition**
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. On dit que $F$ est **stable** par $u$ si seulement si :

$$u(F) \subset F$$

c'est à dire si et seulement si :

$$\forall \vec{x} \in F,\ u(\vec{x}) \in F$$

**Définition : Endomorphisme induit sur un sous-espace stable**
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$. Alors, l'application :

$$\widetilde{u} \ : \ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ \vec{x} & \longmapsto & u(\vec{x}) \end{array}$$

est un endomorphisme de $F$. On l'appelle **endomorphisme induit** par $\boldsymbol{u}$ sur le sous-espace stable $\boldsymbol{F}$.

**Propriétés**
- Soit $(u, v) \in (\mathscr{L}(E))^2$. Si $F$ est stable par $u$ et $v$ alors il est stable par $u \circ v$.
- Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension finie.
On suppose que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $F$. Alors :
$F$ est stable par $u \iff \forall i \in [\![1, p]\!] \quad , \quad u(e_i) \in F$.

**Exercice 3** *Soit $(u, v) \in (\mathscr{L}(E))^2$ vérifiant $u \circ v = v \circ u$. Montrer que Im $v$ et Ker $v$ sont stables par $u$.*

# 4 Changement de base.

**Désormais $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$.**

## 4.1 Matrice d'un endomorphisme dans une base.

**Définition**
Soit $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de $E$.
On appelle matrice de l' endomorphisme $\boldsymbol{u \in \mathscr{L}(E)}$ dans la base $\mathscr{B}$ la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \dots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

dont les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des images par $u$ des vecteurs de la base $\mathscr{B}$, c'est à dire que :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ u(\vec{e}_j)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,j}\vec{e}_i$$

**Propriété**
L'application $u\in\mathscr{L}(E)\longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels
c'est à dire que :

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall(u,v)\in\mathscr{L}(E)^2,\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda u+\mu v)=\lambda\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)+\mu\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$$

$$\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ \exists! u\in\mathscr{L}(E)\ /\ A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$$
$$\dim(\mathscr{L}(E))=\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))=n^2=\dim(E)^2$$

**Exercice 4** *$n$ est un entier naturel non nul.*
*On définit $\Delta$, l'application qui à un polynôme $P$ de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme réel $\Delta(P)$ vérifiant, pour tout réel $x$,*

$$\Delta(P)(x)=P(x+1)-P(x).$$

*On pose $F_0=1$ et pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ $F_k=\dfrac{1}{k!}X(X-1)\cdots(X-k+1)$.*

1. *Montrer que $\Delta$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.*
2. *$\Delta$ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ?*
3. *Montrer que la famille $(F_0,\ldots,F_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.*
4. *Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$ calculer $\Delta(F_k)$ . En déduire la matrice de $\Delta$ dans la base $(F_0,\ldots,F_n)$ .*
5. *Déterminer Ker $\Delta$. Montrer que Im $\Delta=\mathbb{R}_{n-1}[X]$.*

**Exercice 5** *Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ une base de $E$. Soit* **P** *le plan de $E$ d'équation $x=y$ dans la base $\mathscr{B}$ et* **D** *la droite vectorielle dirigée par $e_2$.*

1. *Montrer que $\mathbf{P}\bigoplus\mathbf{D}=E$.*
2. *Écrire la matrice dans la base $\mathscr{B}$ du projecteur sur* **P** *de direction* **D**.

**Exercice 6** *question courte ESCP*
*Soit $E$ l'ensemble des endomorphismes $f$ de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que pour tout polynôme $P$, $\deg f(P)\leqslant\deg P$.*
*Montrer que $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et déterminer sa dimension.*

**Théorème : Lien entre les opérations matricielles et le calcul de l'image par un endomorphisme**
Soit $u\in\mathscr{L}(E)$ et $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Soit $X$ la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur $\vec{x}\in E$ dans la base $\mathscr{B}$. Alors $Y=AX$ est la matrice colonne des coordonnées de $\overrightarrow{y}=u(\vec{x})$ dans la base $\mathscr{B}$.

$$\boxed{\overrightarrow{y}=u(\overrightarrow{x})\Longleftrightarrow Y=AX}$$

**Propriété**
Si $u\in\mathscr{L}(E)$ et $v\in\mathscr{L}(E)$ alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u\circ v)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\cdot\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$$

En conséquence, si $u\in\mathscr{L}(E)$ alors :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^k)=\left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\right]^k.$$

si $u\in\mathscr{GL}(E)$ alors :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1})=\left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\right]^{-1}.$$

## 4.2 Matrice de passage de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$ .

**Définition**
On appelle **matrice de passage** de la base $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$, la matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ exprimées dans la base $\mathscr{B}$.

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = [p_{i,j}]_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad \text{avec} \quad \vec{e'}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j}\vec{e}_i.$$

**Propriété**
Soit $\overrightarrow{x} \in E$.
On note $X_{\mathscr{B}}$ la matrice colonne des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathscr{B}$ de $E$.
On note $X_{\mathscr{B}'}$ la matrice colonne des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathscr{B}'$ de $E$.
Alors

$$\boxed{X_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}X_{\mathscr{B}'}}$$

**Théorème**
Toute matrice de passage d'une base de $E$ vers une autre base de $E$ est inversible et

$$\boxed{P^{-1}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}}$$

## 4.3 Formule de changement de base.

**Théorème**
$u \in \mathscr{L}(E)$

$$\boxed{\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\, P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}}$$

## 4.4 Matrices semblables.

**Définition**
Deux matrices $A$ et $B$ carrées sont semblables s'il existe une matrice inversible $P$ telle que $B = P^{-1}AP$.
$A$ et $B$ peuvent être interprétées comme les matrices d'un même endomorphisme dans des bases différentes.

**Exercice 7** *Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $E$. Soit $u$ l'endomorphisme de $E$ ayant pour matrice*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

*dans la base $\mathscr{B}$.*

1. *Montrer que $f$ est une symétrie.*
2. *Déterminer ses éléments caractéristiques.*
3. *Déterminer une base $\mathscr{B}'$ de $E$ telle que*

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \Delta \text{ où } \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. *Expliquer pourquoi $M$ et $\Delta$ sont deux matrices semblables.*

# 5 Trace.

## 5.1 Trace d'une matrice carrée.

**Définition**
La trace de la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la la somme de ses coefficients diagonaux.

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

## 5.2 Propriétés.

**Théorème : Linéarité de la trace.**
L'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vers $\mathbb{K}$ qui à une matrice associe sa trace est une forme linéaire.
En d'autres termes :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \forall (\lambda, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \mathrm{Tr}(\lambda A + \beta B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \beta \mathrm{Tr}(B)$$

**Exercice 8** *$E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ; déterminer la dimension de $H = \{A \in E / Tr(A) = 0\}$.*

**Exercice 9**
1. *Montrer que $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2 \quad , \quad Tr(AB) = Tr(BA)$*
2. *Peut-on trouver deux matrices $A$ et $B$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB - BA = I_n$ ?*

## 5.3 Invariance de la trace par changement de base.

**Théorème**
Deux matrices semblables ont la même trace. En d'autres termes :
Pour toute matrice $A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et toute matrice $P$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible, on a :

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP).$$

**Exercice 10** *$E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$.*
1. *Montrer que deux matrices semblables ont la même trace.*
2. *Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, justifier la notation $\mathrm{Tr}(f)$.*
3. *Soit $p$ un projecteur de $E$. Montrer que : $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}\ p$.*